

PROGRAMME OPTIMAL POUR LE CHAUFFAGE DES CORPS

L. K. GLOUCHKOV† et M. D. MIKHAILOV‡

(Reçu le 7 Septembre 1966)

Résumé—On détermine la variation de la température du milieu chauffant, nécessaire pour porter un corps à une température donnée en un temps minimal. Les résultats sont donnés pour une plaque, un cylindre et une sphère.

NOTATIONS

r ,	coordonnée;
τ ,	temps;
$t(r, \tau)$,	température au point de coordonnée r à l'instant τ ;
Γ ,	facteur de forme respectivement égal à 0, 1, 2 pour la plaque, le cylindre et la sphère;
λ ,	coefficient de conductibilité thermique;
a ,	diffusivité thermique;
h ,	coefficient de convection;
$t_f(\tau)$,	température du milieu chauffant;
t_{f1}, t_{f2} ,	température maximale et minimale du milieu chauffant;
t_0 ,	température initiale du corps;
t_c ,	température donnée, qui doit être atteinte à la fin du chauffage;
R ,	demi-épaisseur de la plaque, rayon du cylindre ou de la sphère;
$\xi = \frac{r}{R}$,	coordonnée sans dimensions;
θ ,	température relative du corps $\left(\theta = \frac{t(r, \tau) - t_c}{t_c - t_0}\right)$;
θ_f ,	température relative du milieu chauffant $\left(\theta_f = \frac{t_f(\tau) - t_c}{t_c - t_0}\right)$;
Bi ,	nombre de Biot $\left(Bi = \frac{h \cdot R}{\lambda}\right)$;
Fo ,	nombre de Fourier $\left(Fo = \frac{a\tau}{R^2}\right)$.

1. INTRODUCTION

LA CHAUFFE rapidement et uniforme des lingots avant laminage est d'une grande importance. Une chauffe accélérée améliore la structure de l'acier, réduit l'oxydation et la décarbonisation. L'uniformisation de la température des lingots améliore la qualité du laminage et diminue l'usure des cylindres du laminoir. Cela conduit au problème de la programmation d'un chauffage optimal assurant, en un temps minimal, une température uniforme dans toute la masse du corps.

† Centre de Calcul, Sofia, Bulgarie.

‡ Institut Supérieur de Mécanique Appliquée et d'Electrotechnique, Sofia, Bulgarie.

Le problème de la programmation optimale des systèmes à paramètres distribués est traité dans les articles de Egorov [1, 2]. Ses résultats ont été utilisés dans [3, 4] qui donnent la solution dans le cas de la plaque. Nous présentons une solution généralisée valable pour la plaque, le cylindre et la sphère. Les résultats ont été tabulés par un ordinateur numérique. A l'aide de ces tables, la solution analytique permet aisément de trouver un régime optimal de chauffage dans un cas concret.

2. THEORIE MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

Le champ thermique du corps chauffé peut être décrit par l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left\{ \frac{\partial^2 t(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{\Gamma}{r} \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right\}. \quad (1)$$

En raison de la symétrie de la courbe de distribution de la température à chaque instant, on a :

$$\frac{\partial t(0, \tau)}{\partial r} = 0. \quad (2)$$

A l'instant initial, la température est la même en tout point du corps, et elle est égale à :

$$t(r, 0) = t_0. \quad (3)$$

L'échange de chaleur entre la surface du corps et le milieu ambiant suit la loi de Newton :

$$\lambda \frac{\partial t(R, r)}{\partial r} + h[t(R, r) - t_f(\tau)] = 0. \quad (4)$$

La température du milieu chauffant peut varier entre les limites suivantes :

$$t_{f1} \leq t_f(\tau) \leq t_{f2}. \quad (5)$$

Il faut trouver une loi de variation de la température du milieu chauffant, telle que l'on obtienne une température donnée et uniforme du corps en un temps minimal.

Les équations et les conditions (1) à (5) s'écrivent sous forme non-dimensionnelle :

$$\frac{\partial \theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + \frac{\Gamma}{\xi} \frac{\partial \theta(\xi, Fo)}{\partial \xi}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Fo)}{\partial \xi} = 0, \theta(\xi, 0) = -1, \frac{\partial \theta(1, Fo)}{\partial \xi} + Bi[\theta(1, Fo) - \theta_f(Fo)] = 0, \quad (7)$$

$$\theta_{f1} \leq \theta_f(Fo) \leq \theta_{f2}. \quad (8)$$

La variation relative de l'enthalpie est donnée par :

$$\frac{Q}{Q_0} = (\Gamma + 1) \int_0^1 \xi^\Gamma \theta(\xi, Fo) d\xi. \quad (9)$$

La qualité du chauffage est déterminée par la grandeur de la fonctionnelle :

$$I = (\Gamma + 1) \int_0^1 \xi^\Gamma \theta^2(\xi, Fo) d\xi. \quad (10)$$

Nous utiliserons pour le problème de la programmation optimale des grandeurs sans dimensions. L'équation de la chaleur (6) est donnée avec les conditions aux limites (7). On doit trouver la fonction, satisfaisant la condition (8) telle que la fonctionnelle (10) atteigne sa valeur minimale en un temps minimal F_{0_0} . Ce qui revient à satisfaire à la condition :

$$\theta(\xi, F_{0_0}) = 0 \quad (11)$$

pour $0 \leq \xi \leq 1$.

3. SOLUTION ET DISCUSSION

La solution de l'équation (6) avec les conditions aux limites (7) est :

$$\theta(\xi, F_0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_I(\mu_n \xi) \left\{ -1 + \int_0^{F_0} \theta_f(F_0^*) \exp(\mu_n^2 F_0^*) d(\mu_n^2 F_0^*) \right\} \exp(-\mu_n^2 F_0) \quad (12)$$

où :

$$A_n = \frac{2V_I(\mu_n)}{\mu_n^2 \{V_I^2(\mu_n) + \phi_I^2(\mu_n)\} + (1 - \Gamma) \phi_I(\mu_n) V_I(\mu_n)} \quad (13)$$

et où sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\frac{\phi_I(\mu)}{V_I(\mu)} = \frac{\mu}{Bi} \quad (14)$$

Les fonctions $\phi_I(\mu)$ et $V_I(\mu)$ sont définies dans la référence (5).

$$\phi_0(\mu) = \cos \mu, \quad \phi_1(\mu) = J_0(\mu), \quad \phi_2(\mu) = \frac{\sin \mu}{\mu};$$

$$V_0(\mu) = \sin \mu, \quad V_1(\mu) = J_1(\mu), \quad V_2(\mu) = \frac{-\mu \cos \mu^2 + \sin \mu}{\mu^2}$$

Pour satisfaire l'identité (11), il faut et il suffit que tous les termes de la série (12) s'annulent, c'est-à-dire que le système infini d'équations :

$$-1 + \int_0^{F_{0_0}} \theta_f(F_0^*) \exp(\mu_n^2 F_0^*) d(\mu_n^2 F_0^*) = 0, \quad (15)$$

soit satisfait, et que le temps F_{0_0} soit le plus petit possible.

Dans les références [1] et [2] on démontre, que la fonction $\theta_f(F_0)$ reste comprise entre ses grandeurs limites θ_{f_2} et θ_{f_1} , et qu'elle possède un nombre infini mais dénombrable de points de discontinuité (de commutations) dans l'intervalle $[0, F_{0_0}]$. Le point F_{0_0} est un point limite de commutation, par suite $[\lim_{k \rightarrow \infty} |F_{0_k} - F_{0_{k-1}}| = 0]$ F_{0_k} et $F_{0_{k-1}}$ sont deux points voisins de la commutation de la fonction $\theta_f(F_0)$. Puisque le problème à résoudre est le chauffage optimal, la fonction $\theta_f(F_0)$ doit, dans l'intervalle $[0, F_{0_1}]$ prendre la valeur θ_{f_2} , dans l'intervalle $[F_{0_1}, F_{0_2}]$ - θ_{f_1} etc. De cette façon, nous connaissons à l'avance la forme de la fonction $\theta_f(F_0)$ (Fig. 1). En introduisant une fonction de cette forme dans (15) et en intégrant, nous obtenons un système infini d'équations transcendantes :

$$\theta_{f_2} \exp(\mu_n^2 F_{0_1}) - \theta_{f_2} + \theta_{f_1} \exp(\mu_n^2 F_{0_2}) - \theta_{f_1} \exp(\mu_n^2 F_{0_1}) + \dots + \theta_{f_1} \exp(\mu_n^2 F_{0_{2k}}) - \theta_{f_1} \exp(\mu_n^2 F_{0_{2k-1}}) = 1. \quad (16)$$

Table 1

1/Bi	K	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	F_{01}	0,05369	0,10948	0,16966	0,23689	0,31469	0,40850	0,52811	0,69517	0,97861
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,08740 0,07128	0,06833 0,06942	0,05316 0,06626	0,04103 0,06186	0,03117 0,05631	0,02300 0,04959	0,01606 0,04142	0,01005 0,03103	0,00474 0,01657
0,1	F_{01}	0,06478	0,13212	0,20476	0,28594	0,37992	0,49326	0,63776	0,83963	1,18215
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,10489 0,03851	0,08194 0,03721	0,06371 0,03500	0,04915 0,03193	0,03734 0,02812	0,02755 0,02368	0,01924 0,01859	0,01204 0,01276	0,00568 0,00599
0,2	F_{01}	0,07611	0,15530	0,24085	0,33656	0,44749	0,58135	0,75211	0,99073	1,39572
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,12049 0,01938	0,09380 0,01871	0,07277 0,01754	0,05606 0,01588	0,04256 0,01382	0,03139 0,01142	0,02192 0,00874	0,01372 0,00579	0,00648 0,00260
0,5	F_{01}	0,10972	0,22442	0,34919	0,48970	0,65328	0,85128	1,10436	1,45857	2,06049
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,15346 0,00504	0,11730 0,00491	0,08996 0,00464	0,06891 0,00424	0,05220 0,00371	0,03848 0,00306	0,02687 0,00233	0,01681 0,00152	0,00794 0,00068
0,8	F_{01}	0,14261	0,29252	0,45678	0,64279	0,86012	1,12377	1,46131	1,93433	2,73904
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,17348 0,00221	0,13006 0,00217	0,09876 0,00206	0,07537 0,00190	0,05704 0,00167	0,04204 0,00139	0,02935 0,00106	0,01836 0,00070	0,00867 0,00031
1,0	F_{01}	0,16427	0,33759	0,52827	0,74481	0,99823	1,30598	1,70030	2,25326	3,19448
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,18282 0,00147	0,13551 0,00144	0,10242 0,00138	0,07807 0,00127	0,05907 0,00113	0,04353 0,00094	0,03039 0,00072	0,01902 0,00047	0,00898 0,00021
2,0	F_{01}	0,27110	0,56146	0,88503	1,25508	1,68994	2,21959	2,89980	3,85547	5,48481
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,20741 0,00039	0,14827 0,00039	0,11107 0,00037	0,08453 0,00035	0,06395 0,00031	0,04713 0,00026	0,03291 0,00020	0,02059 0,00013	0,00972 0,00006
5,0	F_{01}	0,58786	1,23097	1,95484	2,78691	3,76811	4,96629	6,50825	8,67833	12,38347
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,22408 0,00065	0,15679 0,00064	0,11129 0,00062	0,08926 0,00058	0,06752 0,00053	0,04976 0,00045	0,03475 0,00035	0,02174 0,00023	0,01026 0,00010
8,0	F_{01}	0,90396	1,90038	3,02478	4,31919	5,84717	7,71454	10,11919	13,50513	19,28874
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,22756 0,00026	0,15907 0,00025	0,11899 0,00025	0,09056 0,00023	0,06851 0,00021	0,05049 0,00018	0,03525 0,00014	0,02205 0,00009	0,01041 0,00004
10,0	F_{01}	1,11468	2,34665	3,73808	5,34075	7,23332	9,54689	12,52678	16,72346	23,89301
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,22869 0,00016	0,15985 0,00016	0,11958 0,00016	0,09100 0,00015	0,06884 0,00013	0,05073 0,00011	0,03542 0,00009	0,02216 0,00006	0,01046 0,00003
20,0	F_{01}	2,16828	4,57807	7,30478	10,44889	14,16457	18,70941	24,56591	32,81690	46,91728
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,23097 0,00004	0,16144 0,00004	0,12077 0,00004	0,09191 0,00004	0,06953 0,00003	0,05124 0,00003	0,03578 0,00002	0,02238 0,00002	0,01057 0,000007

50,0	F_{01} $F_{02} - F_{01}$ I	5,32905 0,23236 0,0000007	11,27229 0,16241 0,0000007	18,00487 0,12150 0,0000006	25,77340 0,09246 0,0000006	34,95859 0,06995 0,0000005	46,19758 0,05155 0,0000005	60,68430 0,03599 0,0000004	81,09888 0,02252 0,0000002	115,9930 0,01063 0,0000001
80,0	F_{01} $F_{02} - F_{01}$ I	8,48989 0,23271 0,0000003	17,96664 0,16266 0,0000003	28,70519 0,12168 0,0000002	41,09826 0,09260 0,0000002	55,75313 0,07005 0,0000002	73,68645 0,05163 0,0000002	96,80366 0,03605 0,0000001	129,3822 0,02255 0,0000001	185,0709 0,01065 0,0000004
100,0	F_{01} $F_{02} - F_{01}$ I	10,59702 0,23283 0,0000002	22,42935 0,16274 0,0000002	35,83842 0,12174 0,0000002	51,31439 0,09265 0,0000002	69,61555 0,07009 0,0000001	92,01157 0,05165 0,0000001	120,8822 0,03607 0,0000001	161,5697 0,02256 0,0000006	231,1208 0,01065 0,0000003

Tableau 2

1/Bi	K	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	F_{01} $F_{02} - F_{01}$ I	0,02564 0,05548 0,08653	0,05204 0,04530 0,08344	0,08004 0,03652 0,07833	0,11071 0,02893 0,07124	0,14554 0,02236 0,06218	0,18688 0,01665 0,05110	0,23897 0,01168 0,03794	0,31114 0,00732 0,02301	0,43284 0,00346 0,00814
0,1	F_{01} $F_{02} - F_{01}$ I	0,03113 0,06697 0,05178	0,06318 0,05463 0,04963	0,09718 0,04401 0,04611	0,13444 0,03484 0,04131	0,17678 0,02691 0,03536	0,22706 0,02004 0,02838	0,29043 0,01405 0,02055	0,37826 0,00881 0,01215	0,52640 0,00416 0,00421
0,2	F_{01} $F_{02} - F_{01}$ I	0,03689 0,07750 0,02580	0,07491 0,06300 0,02470	0,11529 0,05058 0,02287	0,15963 0,03993 0,02038	0,21010 0,03078 0,01732	0,27016 0,02288 0,01379	0,34598 0,01604 0,00990	0,45117 0,01004 0,00584	0,62874 0,00474 0,00203
0,5	F_{01} $F_{02} - F_{01}$ I	0,05406 0,10000 0,00660	0,10998 0,07972 0,00635	0,16985 0,06296 0,00591	0,23618 0,04906 0,00528	0,31240 0,03747 0,00450	0,40381 0,02771 0,00360	0,51994 0,01937 0,00260	0,68174 0,01212 0,00156	0,95573 0,00572 0,00056
0,8	F_{01} $F_{02} - F_{01}$ I	0,07077 0,11391 0,00289	0,14435 0,08891 0,00279	0,22376 0,06909 0,00260	0,31252 0,05328 0,00234	0,41531 0,04047 0,00200	0,53929 0,02985 0,00160	0,69740 0,02085 0,00117	0,91828 0,01304 0,00071	1,29308 0,00616 0,00026
1,0	F_{01} $F_{02} - F_{01}$ I	0,08174 0,12054 0,00192	0,16701 0,09286 0,00185	0,25949 0,07154 0,00173	0,36337 0,05492 0,00155	0,48409 0,04163 0,00133	0,63006 0,03069 0,00107	0,81648 0,02143 0,00078	1,07724 0,01341 0,00048	1,52013 0,00633 0,00017
2,0	F_{01} $F_{02} - F_{01}$ I	0,13557 0,13877 0,00051	0,27909 0,10186 0,00049	0,43755 0,07673 0,00046	0,61788 0,05845 0,00042	0,82919 0,04422 0,00036	1,08601 0,03258 0,00029	1,41528 0,02275 0,00022	1,87727 0,01423 0,00013	2,66400 0,00672 0,000049

Tableau 2—continued

1/Bi K	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
5,0	F_{01}	0,29422	0,61357	0,97196	1,38325	1,86770	2,45876	3,21890	4,28807
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,15189 0,000084	0,10671 0,000082	0,07983 0,000077	0,06076 0,000070	0,04596 0,000060	0,03387 0,000049	0,02365 0,000036	0,01480 0,000022
8,0	F_{01}	0,45223	0,94814	1,50678	2,14923	2,90706	3,82272	5,02420	6,70130
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,15413 0,000033	0,10778 0,000032	0,08063 0,000030	0,06136 0,000027	0,04642 0,000024	0,03421 0,000019	0,02389 0,000014	0,01494 0,0000089
10,0	F_{01}	0,55756	1,17124	1,86339	2,65997	3,60009	4,74885	6,22796	8,31044
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,15471 0,000021	0,10815 0,000021	0,08090 0,000019	0,06157 0,000018	0,04658 0,000015	0,03432 0,000012	0,02397 0,0000093	0,01499 0,0000057
20,0	F_{01}	1,08428	2,28684	3,64662	5,21390	7,06557	9,32996	12,24734	16,35696
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,15577 0,0000053	0,10888 0,0000052	0,08145 0,0000049	0,06199 0,0000044	0,04689 0,0000039	0,03456 0,0000032	0,02413 0,0000023	0,01510 0,0000014
50,0	F_{01}	2,66464	5,63394	8,99667	12,87618	17,46264	23,07414	30,30670	40,49820
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,15640 0,0000008	0,10932 0,0000008	0,08178 0,0000008	0,06224 0,0000007	0,04708 0,0000006	0,03470 0,0000005	0,02423 0,0000004	0,01516 0,0000002
80,0	F_{01}	4,24505	8,98109	14,34679	20,53857	27,85985	36,81851	48,36630	64,63977
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,15656 0,0000003	0,10943 0,0000003	0,08186 0,0000003	0,06230 0,0000003	0,04713 0,0000002	0,03473 0,0000002	0,02425 0,00000015	0,01517 0,00000009
100,0	F_{01}	5,29862	11,21246	17,91344	25,64669	34,79114	45,98117	60,40571	80,73373
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,15662 0,0000002	0,10947 0,0000002	0,08189 0,0000002	0,06232 0,0000002	0,04715 0,0000002	0,03474 0,0000001	0,02426 0,00000009	0,01518 0,00000006

Tableau 3

1/Bi K	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	F_{01}	0,01615	0,03272	0,05018	0,06913	0,11543	0,14660	0,18941	0,26112
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,03928 0,10066	0,03263 0,09702	0,02674 0,09096	0,02150 0,08246	0,01683 0,07147	0,01267 0,05794	0,00896 0,04201	0,00564 0,02452
0,1	F_{01}	0,01973	0,03997	0,06131	0,08448	0,14114	0,17933	0,23179	0,31975
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,04769 0,05790	0,03958 0,05546	0,03240 0,05145	0,02604 0,04598	0,02037 0,03914	0,01532 0,03108	0,01082 0,02206	0,00681 0,01262

0,2	F_{01}	0,02359	0,04782	0,07339	0,10122	0,13259	0,16953	0,21576	0,27942	0,38634
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,05555 0,02759	0,04593 0,02636	0,03746 0,02436	0,02999 0,02164	0,02339 0,01830	0,01755 0,01444	0,01237 0,01021	0,00777 0,00584	0,00367 0,00194
0,5	F_{01}	0,03513	0,07135	0,10988	0,15224	0,20056	0,25813	0,33091	0,43198	0,60271
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,07223 0,00690	0,05852 0,00659	0,04685 0,00608	0,03689 0,00539	0,02839 0,00454	0,02108 0,00358	0,01476 0,00254	0,00924 0,00148	0,00436 0,00051
0,8	F_{01}	0,04634	0,09434	0,14585	0,20306	0,26896	0,34814	0,44885	0,58931	0,82730
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,08250 0,00302	0,06539 0,00288	0,05139 0,00266	0,03992 0,00235	0,03043 0,00198	0,02248 0,00156	0,01571 0,00111	0,00983 0,00065	0,00464 0,00023
1,0	F_{01}	0,05369	0,10948	0,16966	0,23689	0,31469	0,40850	0,52811	0,69517	0,97861
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,08740 0,00200	0,06833 0,00191	0,05316 0,00176	0,04103 0,00156	0,03117 0,00131	0,02300 0,00104	0,01606 0,00074	0,01005 0,00044	0,00474 0,00015
2,0	F_{01}	0,08968	0,18425	0,28824	0,40630	0,54443	0,71216	0,92705	1,22837	1,74122
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,10098 0,00053	0,07496 0,00051	0,05669 0,00047	0,04322 0,00041	0,03270 0,00035	0,02410 0,00028	0,01683 0,00020	0,01053 0,00012	0,00497 0,000042
5,0	F_{01}	0,19552	0,40713	0,64431	0,91632	1,23656	1,62716	2,12935	2,83555	4,04049
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,11094 0,00088	0,07815 0,00084	0,05847 0,00077	0,04450 0,00068	0,03366 0,00058	0,02481 0,00046	0,01732 0,00033	0,01084 0,00020	0,00512 0,000071
8,0	F_{01}	0,30086	0,63013	1,00080	1,42692	1,92943	2,54310	3,3286	4,44438	6,34220
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,11254 0,00034	0,07873 0,00033	0,05890 0,0003	0,04482 0,00027	0,03391 0,00023	0,02499 0,00018	0,01745 0,00013	0,01092 0,000078	0,00515 0,000028
10,0	F_{01}	0,37106	0,77884	1,23852	1,76739	2,39144	3,15384	4,13537	5,51715	7,87698
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,11290 0,00022	0,07893 0,00021	0,05904 0,00019	0,04494 0,00017	0,03399 0,00015	0,02505 0,00012	0,01749 0,000084	0,01094 0,000050	0,00517 0,000018
20,0	F_{01}	0,72218	1,52254	2,42730	3,46998	4,70172	6,20789	8,14829	10,88151	15,55165
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,11348 0,000055	0,07932 0,000053	0,05934 0,000049	0,04516 0,000043	0,03416 0,000037	0,02518 0,000029	0,01758 0,000021	0,01100 0,000013	0,00519 0,0000045
50,0	F_{01}	1,77575	3,75393	5,99401	8,57819	11,63314	15,37073	20,18794	26,97579	38,57735
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,11383 0,000009	0,07955 0,000008	0,05951 0,000008	0,04529 0,000007	0,03426 0,000006	0,02525 0,000005	0,01763 0,000003	0,01103 0,000002	0,00521 0,0000007
80,0	F_{01}	2,82934	5,98534	9,56073	13,68641	18,56457	24,53359	32,22760	43,07008	61,60308
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,11390 0,000003	0,07961 0,000003	0,05956 0,000003	0,04533 0,000002	0,03429 0,000002	0,02527 0,000002	0,01764 0,000001	0,01104 0,0000008	0,00521 0,0000003
100,0	F_{01}	3,53177	7,47303	11,93866	17,09205	23,18575	30,64246	40,25443	53,80013	76,95430
	$F_{02} - F_{01}$ I	0,11393 0,000002	0,07963 0,000002	0,05957 0,000002	0,04534 0,000002	0,03430 0,000001	0,02527 0,000001	0,01765 0,0000008	0,01104 0,0000005	0,00521 0,0000002

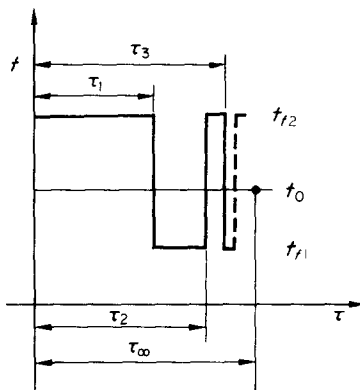


FIG. 1.

Après des transformations convenables, on arrive à :

$$\sum_{j=1}^{2k-1} (-1)^{j+1} \exp(\mu_n^2 Fo_j) + \frac{\theta_{f1}}{\theta_{f2} - \theta_{f1}} \exp(\mu_n^2 Fo_{2k}) = \frac{1 + \theta_{f2}}{\theta_{f2} - \theta_{f1}}. \quad (17)$$

En posant :

$$K = -\frac{\theta_{f1}}{\theta_{f2} - \theta_{f1}} = \frac{t_c - t_{f1}}{t_{f2} - t_{f1}}, \quad L = \frac{1 + \theta_{f2}}{\theta_{f2} - \theta_{f1}} = \frac{t_{f2} - t_0}{t_{f2} - t_{f1}},$$

le système (17) devient :

$$\sum_{j=1}^{2k-1} (-1)^{j+1} \exp(\mu_n^2 Fo_j) - K \exp(\mu_n^2 Fo_{2k}) = L. \quad (18)$$

En raison de l'inégalité $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n$, la série est rapidement convergente, et à partir d'un moment donné les termes de puissance élevée deviennent infiniment petits par rapport aux premiers termes de la série. Cela assure une convergence rapide des points de commutation de la fonction $\theta_f(Fo)$ et explique pourquoi les premiers intervalles où la fonction $\theta_f(Fo)$ garde le même signe couvrent la majeure partie du temps du processus d'optimisation. Du fait de la réduction rapide du nombre de termes de la série (12), il suffit de résoudre le système infini (18) pour les premières équations seulement. Si k est assez grand, pour les $k + 1$ équations, tous les points de commutation de la fonction $\theta_f(Fo)$ se déplaceront d'une distance infiniment petite.

Le cas le plus important dans le travail des métaux à chaud est celui où un corps à température initiale égale à la température ambiante $t_{f1} = t_0$ est chauffé dans des fours à température constante puis refroidi avant le laminage. On a résolu dans ce cas ($L = 1$) le système infini (18) à l'aide de l'ordinateur "Minsk 22" pour 2 et 4 intervalles où la fonction $\theta_f(Fo)$ garde le même signe, et calculé la fonctionnelle (10). Les racines de l'équation (14) nécessaires pour le calcul ont été tirées des tables le plus précises, celles de Grigull [6].

Les résultats de ces calculs ont montré que dans la plupart des cas, les deux premiers intervalles conduisent à une précision satisfaisante pour les applications techniques. Les solutions pour la plaque, le cylindre et la sphère sont données dans les Tables 1, 2 et 3. On donne aussi les valeurs de

la fonctionnelle (10) calculées à partir de la formule:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\Gamma + 1)}{\left\{ 1 + \left(\frac{\mu_n}{Bi} \right)^2 + \frac{1 - \Gamma}{Bi} \right\} (\mu_n K)^2} \left\{ \exp[-\mu_n^2 (Fo_2 - Fo_1)] - \exp(-\mu_n^2 Fo_2) - K \right\}^2. \quad (19)$$

EXEMPLE NUMERIQUE

On désire porter un arbre de diamètre $d = 0,2$ m à la température $t_c = 820^\circ\text{C}$. A l'instant initial, la température de l'arbre est égale à la température ambiante $t_{f1} = 20^\circ\text{C}$. Le chauffage est réalisé dans un four à température $t_{f2} = 1020^\circ\text{C}$. On suppose que pendant le chauffage les coefficients h , λ , a restent constants et sont:

$$h = 300 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}, \quad \lambda = 30 \text{ W/m }^\circ\text{C}, \quad a = 0,03 \text{ m}^2/\text{h}.$$

Calculons la valeur des nombres Bi et K

$$Bi = \frac{hR}{\lambda} = 1, \quad K = \frac{t_c - t_{f1}}{t_{f2} - t_{f1}} = 0,8$$

A l'aide de la Table 2, nous trouvons les valeurs: $Fo_1 = 1,07724$, $Fo_2 - Fo_1 = 0,01341$.

En passant à un temps réel, nous obtenons: $\tau = Fo(R^2/a)$.

Par conséquent, l'arbre doit rester dans le four 1293 s, puis 16 s dans l'air ambiant.

BIBLIOGRAPHIE

1. YU. V. EGOROV, Certain problems in the theory of optimal control (in Russian), *Dokl. AN SSSR, Ser. Matem.* **145** (4), 720 (1962).
2. YU. V. EGOROV, Some problems in the theory of optimal control (in Russian), *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz* **3** (5), 887 (1963).
3. YU. N. ANDREEV and A. G. BUTKOVSKY, Optimum control of heating massive bodies (in Russian), *Izv. AN SSSR Tekhn. Kibernetike* (5), 45 (1964).
4. YU. N. ANDREEV and A. G. BUTKOVSKY, The problem of optimum control of heating massive bodies (in Russian), *Zh. Inzh. Fiz.* (1), 87 (1965).
5. M. D. MIKHAILOV, Heat and mass transfer in medium with variable potentials, *Int. J. Heat Mass Transfer* **9**, 695 (1966).
6. U. GRIGULL, *Temperaturausgleich in einfachen Körpern*, S. 2, 6, 9. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg (1964).

Abstract—The variation of heating medium temperature, necessary to raise a body at a given temperature in a minimum time, is determined. The results are given for a plate, a cylinder and a sphere.

Zusammenfassung—Für die Erwärmung eines Körpers auf vorgegebene Temperatur in kürzester Zeit wird der Temperaturverlauf der heizenden Umgebung bestimmt. Die Ergebnisse werden für Platte, Zylinder und Kugel mitgeteilt.

Аннотация—Изменение температуры греющей среды определяется так, чтобы достичь заданной температуры помещенного в среду тела за возможно короткое время. Приводятся таблицы для пластины, цилиндра и шара.